

TALLEX - Experimentos con flujos rotantes para la formación de Oceanógrafos y Meteorólogos
Teorema de Taylor-Proudman

Guadalupe Alonso¹, Carolina Kahl¹, Daniel Valla¹, Igor Prario¹, Pablo Minini²

¹Departamento de Ciencias de la Atmósfera y los Océanos DCAO, FCEN, UBA.

²Departamento de Física, FCEN, UBA.

RESUMEN

Para el conocimiento de la dinámica del Océano y la Atmósfera es de fundamental importancia el estudio de los vórtices y ondas ya que estos caracterizan la circulación a diversas escalas y el transporte de propiedades en ambos sistemas. Es por ello que es importante familiarizarse con el concepto de vorticidad potencial, propiedad física que relaciona el movimiento rotacional de una masa de agua o aire con la rotación de la tierra. En lo que se refiere a los movimientos a gran escala, uno de los casos más simples que se pueden estudiar es el de un fluido rotante homogéneo como el considerado en el Teorema de Taylor-Proudman. Este teorema muestra el carácter bidimensional del movimiento de un fluido rotante como consecuencia del balance entre las fuerzas de Coriolis y de gradiente de presión. La reproducción de este experimento en el laboratorio es de suma utilidad para estudiar las características de la dinámica los fluidos bidimensionales que están lejos de resultar intuitivas.

En este trabajo se ilustran las propiedades de un fluido bidimensional mediante la reproducción del experimento de Taylor en el Laboratorio del Departamento de Ciencias de la Atmósfera y los Océanos (DCAO) en el marco del Taller de Experimentación en Fluidos Geofísicos (TALLEX). Se utiliza un tanque con agua con un obstáculo en el fondo sobre una mesa rotante. Para que los efectos no lineales sean despreciables basta con que la velocidad característica de las parcelas en el fluido sea mucho menor que el producto de la frecuencia de rotación por el diámetro del tanque (lo que sería análogo a decir que el fluido tiene un radio de Rossby menor a uno). Inyectando colorante en diferentes puntos del tanque pueden observarse las características de la dinámica del fluido: la incapacidad de sortear obstáculos o mezclarse y la llamada "cascada inversa de energía".

Palabras clave: Teorema de Taylor Proudman, fluidos geofísicos, experimentos.

ABSTRACT

Vortices and waves are of great importance for studying the Oceanic and Atmospheric dynamics. As these phenomena account for a great deal of the circulation at different scales and the transport of properties in both systems, it is important to be familiar with the concept of “potential vorticity”, a physical property that relates the rotational motion of a mass of air or water and the Earth’s rotation. One of the simplest cases of study in large-scale systems consists of a homogenous rotating fluid as considered in the Taylor-Proudman Theorem. This theorem explains the bi-dimensional nature of rotating flows as a result of the balance between the Coriolis force and the pressure gradient. Taking this experiment to a laboratory experience is most useful for understanding the counter-intuitive characteristics of bi-dimensional fluids dynamics

Properties of a bi dimensional flow are shown through the reproduction of Taylor's experiment in the “Taller de Experimentación de Fluidos Geofísicos (TALLEX)” at “Departamento de Ciencias de la Atmósfera y los Océanos (DCAO)”

A water tank with an obstacle at the bottom placed over a rotating table was used. In order to neglect non-linear effects the velocity of the flow must be much less than the product of the rotation frequency and the diameter of the water tank (i.e., the Rossby radius of the flow is minor to one). Colourant was injected as tracer in order to observe the characteristics of the flow dynamics: incapability of dodging obstacles or mixing and the so-called “energy cascade”.

Key Words: Taylor-Proudman Theorem, geophysical fluids, experiments.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de experiencias de laboratorio que ilustren procesos de la dinámica del Océano y la Atmósfera es de vital importancia para la comprensión de los mismos. A través de estas experiencias el alumno puede visualizar los procesos físicos que hay detrás del complejo sistema de ecuaciones matemáticas que se utilizan para explicar la dinámica de los fluidos geofísicos. En este trabajo se presentan los procedimientos y resultados de diversos experimentos que demuestran las consecuencias del Teorema de Taylor-Proudman en un fluido en balance geostrofico, para los que se utiliza un fluido rotante homogéneo e incompresible. Los mismos fueron desarrollados el Laboratorio del Departamento de Ciencias de la Atmósfera y los Océanos (DCAO) en el marco del Taller de Experimentación con Fluidos Geofísicos (TALLEX).

2. DESARROLLO TEÓRICO

Las ecuaciones de continuidad y momento (ecuación de Navier Stokes) para un fluido incompresible en rotación (Gill, 1982) con la aproximación de Boussinesq son:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \left[\frac{d\mathbf{U}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} \right] = -\nabla P + \rho g + \rho_0 \boldsymbol{\theta} \nabla^2 \mathbf{U} \quad (2)$$

Estas ecuaciones están referidas a un sistema (x,y,z) en donde las direcciones horizontales x e y tienen sentido Este y Norte del lugar respectivamente y z es en la dirección vertical. En

ellas $\mathbf{U}=(u,v,w)$ es el vector velocidad del fluido, $\boldsymbol{\Omega}=(0,\Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$ es el vector de rotación terrestre con φ latitud, P es la presión reducida (sin considerar los efectos de la aceleración centrífuga), $\mathbf{g}=(0,0,-g)$ es la aceleración de la gravedad, ρ la densidad del fluido, $\boldsymbol{\theta}$ es la viscosidad y $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$ es la aceleración de Coriolis.

En el sistema de referencia antes mencionado, tomando que la velocidad w en la vertical es mucho menor que las velocidades horizontales u y v, puede expresarse a la aceleración de Coriolis como $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}=(fv, -fu, -2\Omega \cos \varphi)$. En la expresión anterior, $f=2\Omega \sin \varphi$ es el parámetro de Coriolis y se considera constante si se trabaja en el plano f.

Un parámetro adimensional muy utilizado en el estudio de la dinámica de los fluidos geofísicos es el número de Rossby que compara los efectos de los términos advectivos no lineales frente a los efectos de Coriolis. Para conseguir que los términos de advección no lineales sean despreciables es necesario que Ω sea lo suficientemente grande, haciendo que $Ro \lll 1$.

Si, finalmente, se considera un fluido no viscoso se obtienen como ecuaciones de movimiento para el fluido las ecuaciones de balance geostrofico en la horizontal y la de equilibrio hidrostático en la vertical:

$$\frac{dP}{dx} = \rho f v \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho f u \quad (4)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (5)$$

y la ecuación de continuidad para flujos incompresibles

$$-(du/dx+dv/dy) = dw/dz \quad (6)$$

Eliminando P por diferenciación cruzada en (3) y (4) se obtiene que

$$f_p(du/dx+dv/dy) = 0$$

Entonces, por la ecuación (6)

$$dw/dz = 0 \quad (7)$$

Además se diferencian (3) y (4) respecto de z y usando la ecuación (5)

$$d^2P/dzdx = \rho f dv/dz$$

$$d^2P/dzdx = d/dx(dP/dz) = d/dx(-\rho g) = 0$$

Entonces

$$dv/dz = 0 \quad (8)$$

y

$$d^2P/dzdy = -\rho f du/dz$$

$$d^2P/dzdy = d/dy(dP/dz) = d/dy(-\rho g) = 0$$

Entonces

$$du/dz = 0 \quad (9)$$

Se concluye entonces que no hay gradientes verticales de velocidad

$$du/dz = dv/dz = dw/dz = 0$$

La última ecuación es lo que se conoce como el Teorema de Taylor-Proudman y muestra que, bajo las condiciones descritas, no hay variaciones de velocidad en la dirección del vector de rotación Ω .

Además, si se considera como condición de contorno un fondo plano y rígido se obtiene que la velocidad vertical w debe ser nula en el fondo y, por la ecuación (7) se concluye que el movimiento del fluido es bidimensional.

3. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Para el desarrollo de las experiencias se utilizó una mesa rotante. Sobre la misma se montó un recipiente cilíndrico de acrílico de 46 cm de diámetro, 26 cm de altura y 4mm de espesor que se llenó con agua dulce. Como indicadores, se utilizan colorantes vegetales que son de uso común en repostería, éstas tintas son ligeramente más densas que el agua dulce para poder ver el comportamiento de todo el perfil de agua y no sólo de la superficie. Se montó una cámara fija sobre la mesa rotante para poder visualizar los experimentos de la mejor manera posible.

Se realizan dos experiencias para demostrar dos características notables de un fluido que cumple con los requerimientos del teorema de Taylor-Proudman. En la primera se quiere mostrar una de las consecuencias de que el fluido sea bidimensional: el hecho de que no pueda mezclarse. En la segunda, se reproduce el experimento utilizado por Taylor para demostrar el teorema en el que se muestra cómo el fluido es incapaz de atravesar un obstáculo sumergido como resultado de no poder tener variaciones en la velocidad vertical.

3.1 Experiencia 1:

Se llena el tanque con aproximadamente 10 cm de agua dulce y se lo hace girar con una velocidad de 14 revoluciones por minuto, una vez que el movimiento se estabiliza se provoca una leve variación en la velocidad de rotación para imprimirle al fluido un movimiento relativo. Luego se inyectan tintas de color rojo y azul.

A continuación se presentan las figuras que ilustran el procedimiento:

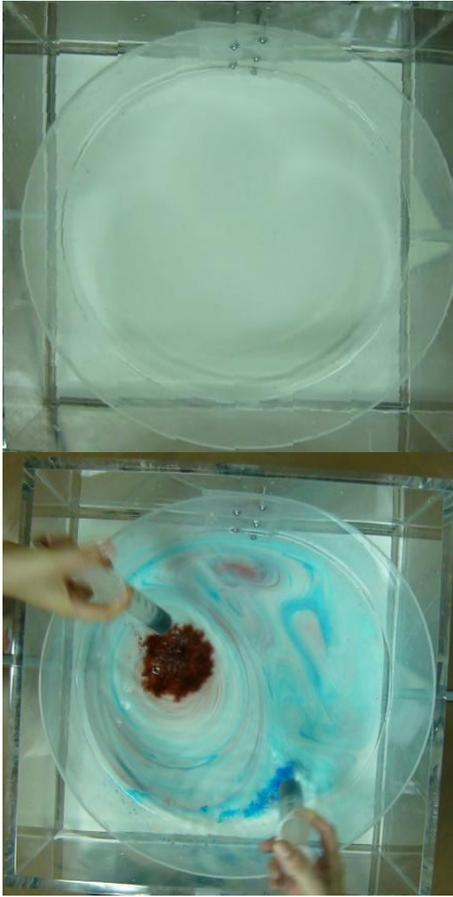
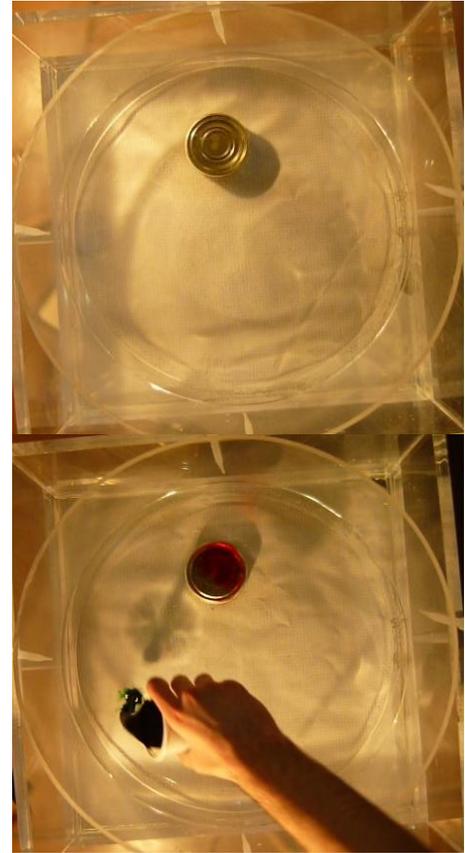


Fig. 1: a) Tanque cilíndrico con 10 cm de agua dulce montado sobre mesa rotante. b) Se introducen indicadores de dos colores diferentes.

3.2 Experiencia 2

Se introduce en el fondo del tanque un obstáculo a unos 13 cm del centro del mismo y se llena el tanque con 10 cm de agua dulce. El obstáculo utilizado (lata de atún común) tiene 4 cm de alto y 8,5 cm de diámetro. Siguiendo un procedimiento similar al de la experiencia anterior, se pone a rotar el tanque a unas 14 revoluciones por minuto. Una vez estabilizado el movimiento, se introduce una ligera variación en la velocidad de rotación y luego se introducen los indicadores. Para este caso, se utiliza tinta roja sobre la superficie del agua en el lugar en donde se encuentra el obstáculo y tinta verde para lo demás.

A continuación se muestran las figuras que ilustran este procedimiento:



*Fig 2:*a) Tanque cilíndrico con 10 cm de agua y un obstáculo en el fondo. b) Se introducen dos indicadores, uno sobre el obstáculo y otro fuera del mismo.

4 RESULTADOS

4.1 Experiencia 1:

Con el fin de presentar los resultados, se utiliza una fotografía obtenida en la experiencia 1 y se la compara con una fotografía tomada con el tanque detenido:



Fig 3: a) Tanque con agua y dos indicadores con la mesa rotando. b) Tanque con agua y dos indicadores con el tanque detenido.

Puede verse que el comportamiento es notablemente diferente en uno y otro caso. Para el caso en el que la mesa se encuentra detenida (Fig. 3b), unos segundos después de introducir los indicadores, prácticamente no puede distinguirse un color de otro. En el caso de la Experiencia 1 (Fig 3a), en donde el tanque se mantiene en movimiento, puede verse que las tintas no se mezclan, evidenciando una de las conclusiones del Teorema de Taylor-Proudman: bajo estas condiciones, el fluido tendrá un carácter bidimensional.

4.2 Experiencia 2:

Para presentar los resultados de esta experiencia, se muestran a continuación tres fotografías de distintos instantes del experimento que ilustran el

comportamiento del fluido dentro del tanque en movimiento.

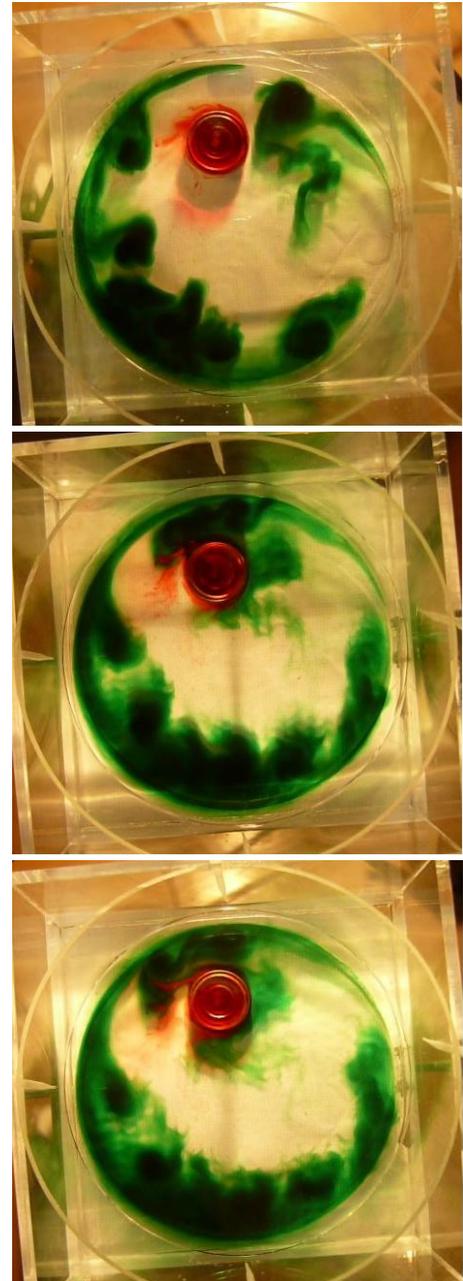


Fig 4: a, b y c) Evolución del movimiento del fluido dentro del tanque en movimiento.

Se remarcan principalmente dos aspectos de lo observado en la Experiencia 2. El primero de ellos es que el agua que está sobre el obstáculo, indicada con rojo, no se desplaza durante todo el movimiento. En segundo lugar, puede observarse

que el fluido, al encontrarse con el obstáculo, no lo supera pasándolo por arriba sino que se ve obligado a desviarse y evitarlo. (Fig. 4 a, b y c)

Esto es una evidencia de que el fluido bajo estas condiciones tiene una componente vertical de velocidad nula, como se demostró en el Teorema de Taylor Proudman.

5 CONCLUSIÓN

Se quiere destacar que, con este trabajo, se demuestra que es posible llevar a cabo experiencias sencillas dentro del laboratorio que ilustren y ayuden a entender al alumno la física que se encuentra detrás de resultados teóricos como el Teorema de Taylor Proudman. Se espera que este trabajo colabore con la mejora de las enseñanzas de las Ciencias de la Atmósfera y los Océanos.

6 REFERENCIAS

Gill, A.E., 1982. Atmosphere-Ocean Dynamics. Vol 30, Academic Press, 645 págs.