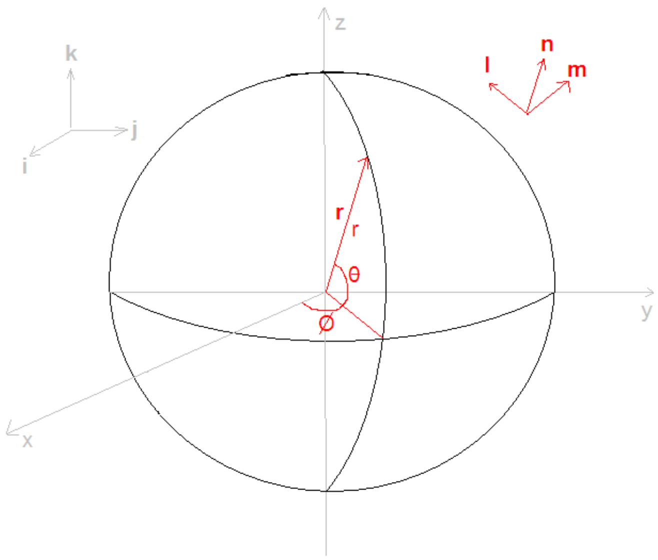
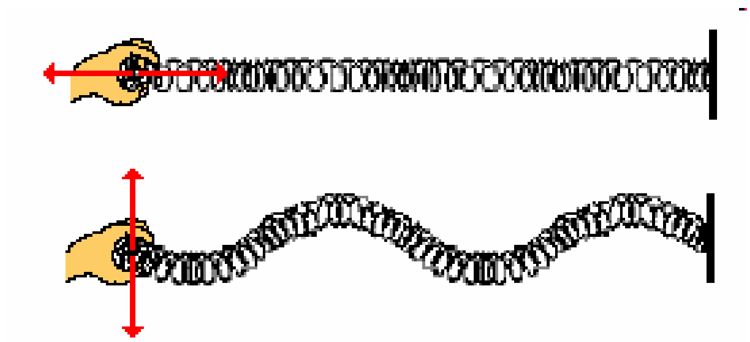
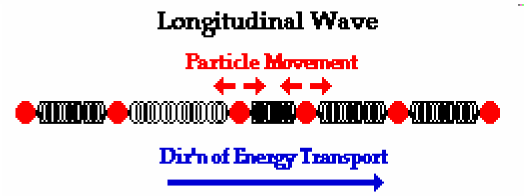
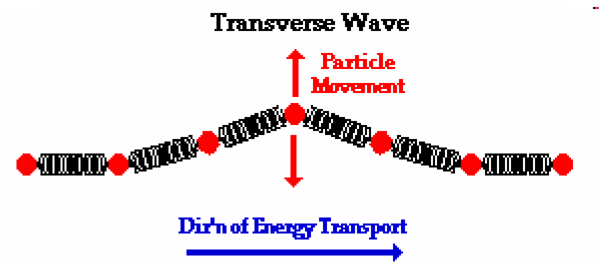
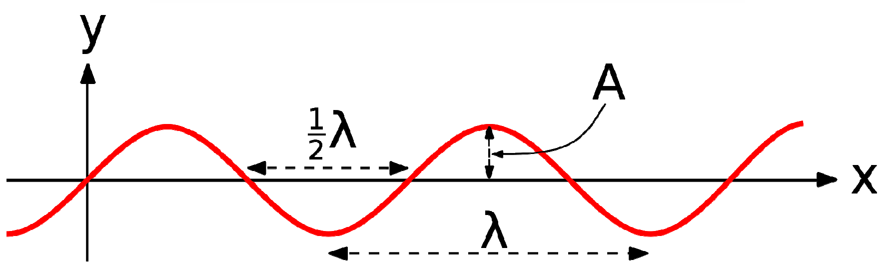
Figuras clase Ecuaciones y Aproximaciones para Ondas

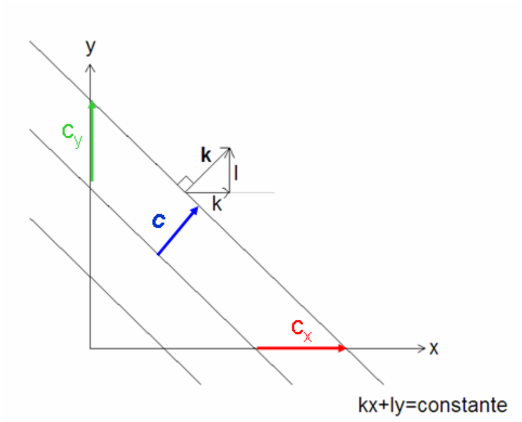


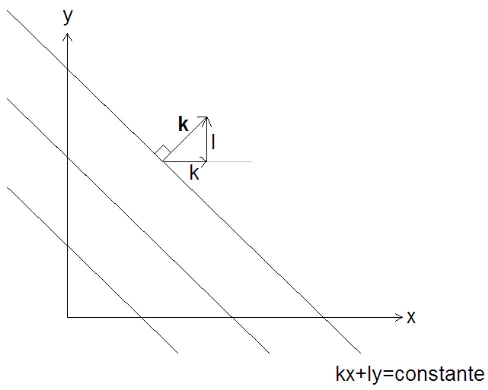









y
x
c_y
k
l
k
c
c_x
kx+ly=constante


y
x
k
l
k
kx+ly=constante

Sistema de ecuaciones en coordenadas esféricas:

Expresadas en este sistema de ecuaciones las ecuaciones de movimiento quedan:

En la dirección de **m** (positivo hacia el este):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla v_\phi+\frac{v_\phi v_r}{r}-\frac{v_\phi v_\theta\tan\theta}{r}+2(\Omega\cos\theta v_r-\Omega\sin\theta v_\theta)=\\&=-\frac{1}{\rho r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\frac{\mu}{\rho}\left\{\nabla^2 v_\phi-\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\left[v_\phi+2\frac{\partial}{\partial\phi}(v_\theta\sin\theta-v_r\cos\theta)\right]\right\}\end{aligned} \tag{1}$$

En la dirección de **l** (positivo hacia el norte):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla v_\theta+\frac{v_\phi^{\,2}}{r}\tan\theta-\frac{v_\theta v_r}{r}+2\Omega\sin\theta v_\phi=\\&=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\mu}{\rho}\left\{\nabla^2 v_\theta-\frac{v_\theta}{r^2\cos^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

En la dirección **n** (positivo hacia arriba):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_r}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla v_r-\frac{v_\phi^{\,2}}{r}-\frac{v_\theta^{\,2}}{r}-2\Omega\cos\theta v_\phi=\\&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\mu}{\rho}\left\{\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}+\frac{2}{r^2\cos\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{2}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\cos\theta)\right\}-g\end{aligned} \tag{3}$$

La ecuación de continuidad queda:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{v_\phi}{r\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)+\\&+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\cos\theta)+\frac{2v_r}{r}+\frac{\partial v_r}{\partial r}=0\end{aligned} \tag{4}$$

La ecuación de conservación de sal (variación total=difusión):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{v_\phi}{r\cos\theta}\frac{\partial S}{\partial\phi}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial S}{\partial\theta}+v_r\frac{\partial S}{\partial r}=\\&=\frac{k_s}{\rho}\left[\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{2}{r}\frac{\partial S}{\partial r}+\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}\right]\end{aligned} \tag{5}$$

Y la ecuación de conservación del calor (idem):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v_\phi}{r\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}=\\&=\frac{k_T}{\rho c_p}\left[\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

Sistema de ecuaciones en plano beta:

Las ecuaciones de movimiento bajo la aproximación del plano β se reducen a:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv+\tilde{f}w=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+ \\ +\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+ \\ +\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{28}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-\tilde{f}u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+ \\ +\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{29}$$

Sistema de ecuaciones en plano f:

En el plano f las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-f_0 v+\tilde{f}w=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+ \\ +\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+f_0 u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+ \\ +\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (34)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-\tilde{f}u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+ \\ +\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (35)$$

Conceptos importantes:

1. La aproximación de Bousinesq es muy válida en el océano y admite que en este fluido las perturbaciones de la densidad sólo son importantes en relación con la flotabilidad.
2. La aproximación del plano beta es válida para movimientos de escala comparable al radio terrestre lejos de los polos, y vale incluso en el ecuador (en ese caso, se lo llama plano beta ecuatorial, donde f0=0)
3. La aproximación del plano f es mucho menos válida. Sólo aplica a movimientos de escala muy pequeña comparada con el radio terrestre y lejos del ecuador.
4. Estas aproximaciones son muy útiles, ya que partiendo de coordenadas esféricas, nos permiten llegar a ecuaciones cuya forma asemeja la cartesiana y son más fáciles de trabajar.
5. El método de las perturbaciones permite linealizar las ecuaciones de movimiento si suponemos algunas premisas como válidas:
    a. Las variables del estado básico satisfacen las ecuaciones cuando las perturbaciones son cero
    b. Las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas como para que los términos de las ecuaciones que involucren productos de perturbaciones puedan ser despreciados.